Početní část 1 - 14.1.2021

1. Spočtěte
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x),$$
kde
$$f(x) = \frac{(1+\lambda x)^2}{x^2+\lambda^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad \text{(7 bodů)}$$
a $\lambda > 0$ je parametr.

Řešení: Mechanickým derivováním spočteme (pro $x \in \mathbb{R}$):
$$f'(x) = \frac{-2\lambda x^2 + 2(\lambda^4-1)x + 2\lambda^3}{(x^2+\lambda^2)^2} = \frac{-2\lambda(x-\lambda^3)(x+\lambda^{-1})}{(x^2+\lambda^2)^2}.$$
Odtud vidíme, že f je monotónní na intervalech $(-\infty, \lambda^{-1}]$, $[\lambda^{-1}, \lambda^3]$ a $[\lambda^3, +\infty)$. Dále spočteme $f(\lambda^{-1}) = 0$, $f(\lambda^3) = \lambda^2 + \lambda^{-2}$. Limity v $\pm\infty$ jsou λ^2. Odtud plyne, že $f(\lambda^3) = \lambda^2 + \lambda^{-2}$ je (ostré) globální maximum a tedy
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \lambda^2 + \lambda^{-2}.$$

2. Je dána funkce

$$f(x) = e^{|\sin x|} - 1, \qquad x \in \mathbb{R}. \qquad\qquad (14 \text{ bodů})$$

Vyšetřete

(a) definiční obor, spojitost a obor hodnot,
(b) zda-li je funkce sudá, lichá, periodická, případně jakou má periodou,
(c) první derivaci včetně jednostranných derivací,
(d) monotonii, globální a lokální extrémy,
(e) druhou derivaci, konvexitu/konkavitu a inflexní body.

Nakonec tuto funkci načrtněte.

Řešení: Funkce f má definiční obor $\mathbb{R}$ a je na něm spojitá, sudá a má periodu π. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ spočteme první derivaci:

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)\, \cos x\, e^{|\sin x|}.$$

Díky spojitosti můžeme jednostranné derivace v bodech $\pi\mathbb{Z}$ spočítat z limity derivací, čímž dostaneme pro všechna $k \in \mathbb{Z}$:

$$f'_+(k\pi) = 1, \qquad f'_-(k\pi) = -1.$$

Dále má funkce f pro každé $k \in \mathbb{Z}$ stacionární bod

$$f\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = e - 1.$$

Ze znaménka první derivace určíme intervaly, na nichž je f monotónní, viz tabulka:

x	$\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$	$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right)$
g'	$+$	-
g	$0 \nearrow e - 1$	$e - 1 \searrow 0$

tedy $f\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = e - 1$ je globální i lokální maximum, $f(k\pi) = 0$ je globální i lokální minimum. Obor hodnot je tedy $[0, e-1]$.Dále spočteme i druhou derivaci:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\cos^2(x) - |\sin x|\right)e^{|\sin x|} \\ &= \left(1 - |\sin x| - \sin^2 x\right)e^{|\sin x|} \\ &= -\left(|\sin x| + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(|\sin x| + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)e^{|\sin x|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

První závorka je vždy kladná, druhá mění znaménko v bodech $\pm\zeta + \pi\mathbb{Z}$, kde

$$\zeta = \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ze znaménka druhé derivace určíme intervaly, na kterých je funkce f konvexní/kokávní, viz tabulka:

x	$(k\pi, \zeta + k\pi)$	$(\zeta + k\pi, -\zeta + (k+1)\pi)$	$(-\zeta + (k+1)\pi, (k+1)\pi)$
g'	$+$	-	$+$
g	$\cup$	$\cap$	$\cup$